Théorie de la relativité restreinte, épisode 1

par Richard Gomez

octobre 2010

Résumé

Nous proposons de poser le décor mathématique dans lequel sont écrites les équations de la théorie de la relativité restreinte. Nous montrons ensuite des phénomènes connus depuis la révolution provoquée par Albert Einstein. Nous montrons par exemple que le temps ne s'écoule pas de la même manière pour un observateur au repos et un observateur en mouvement. Nous montrons également que les dimensions d'un objet dépendent de celui qui l'observe, etc.

1 Principes de la relativité restreinte

En 1905, Albert Einstein énonce dans son article *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement* publié dans la revue *Annalen der physik*, les deux postulats de la relativité restreinte :

1. Les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels inertiels.
2. La vitesse de propagation de la lumière dans le vide est la même dans tout référentiel inertiel.

Pour comprendre ce que signifient ces deux postulats, on identifie l'espace physique à $\mathbb{R}^3$ et on représente le temps à l'aide d'un paramètre réel t.

Un référentiel est la donnée d'un repère $(O,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$ et d'un chronomètre (virtuel). Se donner un référentiel équivaut donc à se donner un système de coordonnées $(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$. La coordonnée t indique le temps, tandis que x_1, x_2, x_3 indiquent la position d'un point dans l'espace. Il existe autant de référentiels que l'on veut, et un référentiel peut être en mouvement par rapport à un autre. On peut dire d'une certaine manière qu'un référentiel est un observateur.

Un référentiel inertiel (ou galiléen) est un référentiel dans lequel tout objet sur lequel ne s'exerce aucune force (objet isolé) est en mouvement de translation rectiligne uniforme. Ainsi, si une petite astéroïde isolée de tout décrit à mes yeux une parabole, c'est que je ne suis pas moi-même galiléen (en fait c'est moi qui décrit des trajectoires bizarres).

Tentons maintenant d'expliquer ce que signifie la phrase : « les lois de la physique sont les mêmes dans les référentiels $\mathfrak{R} = (t, x_1, x_2, x_3)$ et $\mathfrak{R}' = (t', x_1', x_2', x_3')$ ». Nous savons que chaque loi peut s'écrire comme une équation mathématique. La loi fondamentale de la dynamique par exemple, s'écrit, pour un point mobile $M(x(t), y(t), z(t))$ de masse m

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = a \\ m\,\ddot{y} = b \\ m\,\ddot{z} = c \end{cases}$$

dans le référentiel $\mathfrak{R}$ (pourvu que celui-ci soit galiléen). Ici (a, b, c) sont les composantes du vecteur force résultant de toutes les forces appliquées à M. Dire que cette loi est la même pour $\mathfrak{R}'$ signifie que dans $\mathfrak{R}'$ on a aussi

$$\begin{cases} m\,\ddot{x'} = a' \\ m\,\ddot{y'} = b' \\ m\,\ddot{z'} = c' \end{cases}$$

pourvu que (x', y', z') et (a', b', c') soient les coordonnées des anciens (x, y, z) et (a, b, c) dans le nouveau repère. Naturellement, les observateurs $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ ne voient pas la même trajectoire $(x(t)$, $y(t)$, $z(t))$ puisqu'ils ne sont pas au même endroit, mais ils assistent aux mêmes phénomènes : c'est la somme des forces qui détermine l'accélération du mobile M, et rien d'autre.

Si un observateur à côté de moi a la tête en bas et les pieds en hauts, il assistera évidemment aux mêmes phénomènes que moi, sauf qu'il faudra « retourner » ses images mentales pour qu'elles se superposent aux miennes. Cette opération est un simple changement de coordonées.

Voici une autre façon de voir les choses. Fixons un repère au sol et un repère sur un train en mouvement rectiligne uniforme. Si je suis sur le quai (donc au repos par rapport au sol) et que je lâche un cailloux, je verrai exactement la même chose que si je fais la même expérience à l'intérieur du train : je vois le cailloux tomber à mes pieds, verticalement et en accélérant.

D'après Albert Einstein la même expérience faite par des observateurs inertiels A et B conduisent exactement aux mêmes observations pour l'un et pour l'autre. C'est le *principe de relativité*, principe 1 plus haut. La mécanique classique partait déjà du même principe : le tout est de savoir ce qui est considéré comme galiléen ou pas... C'est là qu'il y aura des divergences.

Le deuxième postulat est beaucoup plus surprenant. Illustrons-le avec un exemple imaginaire. Un observateur A se trouve sur le quai tandis qu'un observateur B se trouve dans un train se déplaçant selon un mouvement rectiligne uniforme à vitesse v. Supposons qu'un photon φ croise l'observateur B. Les trajectoires de B et φ sont opposées. Si de mon point de vue la vitesse de φ est c, on pourrait penser que du point de vue de B cette vitesse soit $c+v$ (la vitesse observée par A ajoutée à celle du train). C'est même ce qu'affirme la mécanique classique. Eh bien il n'est rien : Einstein postule que pour A et B la vitesse du photon sera la même ! Bien que cela contredise notre intuition, ce fait a été démontré expérimentalement.

2 Mécanique classique et transformations de Galilée

Donnons-nous un référentiel inertiel $\mathfrak{R}$. Notons (O, e_1, e_2, e_3) le repère correspondant et (t, x_1, x_2, x_3) les coordonnées dans $\mathfrak{R}$. En mécanique classique un référentiel $\mathfrak{R}'$ est inertiel si son repère (O', e_1', e_2', e_3') effectue un mouvement rectiligne uniforme par rapport à $\mathfrak{R}$. Ceci signifie que le vecteur vitesse de O' mesuré dans $\mathfrak{R}$ est un vecteur constant au cours du temps, et que les vecteurs e_1', e_2' et e_3' ne bougent pas par rapport à $\mathfrak{R}$. Autrement dit, les formules permettant de passer de $\mathfrak{R}$ à $\mathfrak{R}'$ sont du type

$$\begin{cases} t' = t \\ x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \alpha t \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \beta t \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \gamma t \end{cases}$$

où (α, β, γ) sont les composantes de la vitesse de O dans $\mathfrak{R}'$ et inversément, $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ sont les composantes de la vitesse de O' dans $\mathfrak{R}$. On notera l'égalité $t' = t$ qui signifie que dans la théorie classique tous les observateurs inertiels déclenchent leur chronomètre au même moment, et donc tous les référentiels ont la même coordonnée t.

Le cas le plus simple est celui d'un référentiel $\mathfrak{R}'$ dont l'origine se déplace le long de l'axe x à vitesse v. Pour ce référentiel le changement de coordonées est

$$\begin{cases} t' = t \\ x_1' = x_1 - vt \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \tag{1}$$

Un tel changement est appelé transformation de Galilée. Tout changement de référentiel inertiel est le produit d'une telle transformation par des changements où n'intervient pas le paramètre t. Ainsi en mécanique classique toute loi de la physique doit être invariante par une transformation de type (1).

Une telle transformation modifie la mesure de la vitesse de la lumière et donc ne peut être considérée comme inertielle dans la théorie de la relativité restreinte. Pour se plier au second principe, Einstein fit appel aux transformations de Lorentz. Ces transformations furent introduites par Hendrik Antoon Lorentz et étudiées par Henri Poincaré afin de pouvoir interpréter convenablement les équations de Maxwell (équations décrivant les champs électromagnétiques).

3 Relativité restreinte et espace de Minkowski

Nous laissons ici de côté la physique et passons directement au formalisme de la théorie tel qu'il fut formulé par Hermann Minkowski[1]. On modélise l'espace et le temps par l'espace vectoriel

$$\mathbb{R}^4 = \{(x_0, x_1, x_2, x_4)\}$$

où

$$x_0 = ct$$

représente le temps (au facteur c près, c étant la vitesse de la lumière) et

$$(x_1, x_2, x_3)$$

la position d'un point dans l'espace physique. Un 4-uplet

$$(ct, x_1, x_2, x_3)$$

est appelé événement. On l'interpréte comme quelque chose se produisant au point (x_1, x_2, x_3) à l'instant t. La droite $(ct,\ 0,\ 0,\ 0)$ par exemple, représente un point situé à l'origine de l'espace physique et ne se déplaçant pas, ce qui ne l'empêche pas d'avoir une trajectoire dans l'espace-temps. On munit l'espace-temps de la forme quadratique de Minkowski

$$q(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{2}$$

qui bien que non dégénérée, n'est ni positive, ni négative, ni définie. On l'appelle aussi métrique de Minkowski. On définit le cône de lumière

$$\mathcal{J} = \{x \in \mathbb{R}^4 ; q(x) = 0\}$$

La section $\mathcal{J}_t = \mathcal{J} \cap \{ct\} \times \mathbb{R}^3$ peut être vu comme l'ensemble des positions à l'instant t de photons qui seraient partis de l'origine spatiale à l'instant $t = 0$.

En fait nous avons un cône de lumière en chaque point de l'espace-temps : au point x par exemple il est constitué des vecteurs v tangents en x tels que $q(v) = 0$. Plus formellement, il faut voir q comme une 2-forme définie sur $\mathbb{R}^4$. Cette forme q en le point x sera appliquée au vecteur vitesse d'un point mobile situé en x, toujours avec la même formule, (2).

Les vecteurs à l'intérieur du cône sont appelés temporaloïdes et ceux à l'extérieur, spatioloïdes. Autrement dit, si $q(x) > 0$, on dit que x est temporaloïde et si $q(x) < 0$, on dit que x est spatioloïde.

Figure 1. Espace de Minkowski. Nous n'avons représenté que (x_0, x_1).

Si on note $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ la trajectoire spatiale d'une particule M, la courbe

$$r(t) = (ct, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

est appelée ligne d'univers de M. Si M possède une masse, sa vitesse est inférieure à celle de la lumière (cela fait partie des postulats) et donc $q(\dot{r}) > 0$ pour toute valeur de t. Ceci signifie qu'en chaque point $r(t)$ de la ligne d'univers de M, le vecteur vitesse $\dot{r}(t)$ est à l'intérieur du cône de lumière.

1. L'espace et la métrique de Minkowski furent introduits pour la première fois par Henri Poincaré.

A la figure ci-dessous on montre des courbes $r(t)$ qui pourraient être des lignes d'univers et d'autres qui ne peuvent pas.

Figure 2. Lignes d'univers possibles et courbes qui ne peuvent pas être une ligne d'univers.

On peut grâce à q définir la longueur d'une ligne d'univers par la formule

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 - \dot{x}_3^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{c^2 - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 - \dot{x}_3^2}\, dt$$

où $t = a$ est le début, et $t = b$ la fin du mouvement mesuré. Cette définition est justifiée par le fait que la forme de Minkowski est positive le long d'une ligne d'univers.

On appelle temps propre de la particule le nombre $\frac{\ell}{c}$. Si par exemple la vitesse spatiale de M est constante égale à v,

$$\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 - \dot{x}_3^2 = v^2$$

alors

$$\ell = \int_a^b \sqrt{c^2 - v^2}\, dt = c(b-a)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

et le temps propre vaut

$$\frac{\ell}{c} = (b-a)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(c'est une contraction de la durée $b - a$). On notera que si la particule est au repos alors le temps propre coïncide avec $b - a$.

On appelle groupe de Poincaré l'ensemble des transformations affines de l'espace-temps qui laissent la forme q invariante. Cet ensemble est bien un groupe pour la loi $\circ$. Notons que pour l'instant nous n'avons donné que des définitions, nous n'avons rien dit de « physique ».

La théorie de la relativité postule que les référentiels inertiels sont tous les référentiels qui s'obtiennent par une transformation de Poincaré. Nous montrerons que ce postulat possède des conséquences pour le moins étonnantes.

On appelle groupe de Lorentz le groupe des transformations linéaires de $\mathbb{R}^4$ qui laissent q invariante. On le note $\mathcal{O}(1,3)$. Le couple $(1,3)$ de cette notation est là pour nous rappeler que q est une forme quadratique de signature $(1,3)$.

L'espace $\mathbb{R}^4$ muni de la forme q est appelé espace de Minkowski et noté $\mathbb{R}_1^4$. Le 1 est là pour nous rappeler la signature de q. Si on se contente de repérer les points de l'espace avec deux coordonnées, on introduit l'espace $\mathbb{R}_1^3$ qui est tout simplement l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la forme

$$c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2$$

On définit de manière analogue $\mathbb{R}_1^2$, si on étudie système à un degré de liberté.

4 Groupe de Lorentz de $\mathbb{R}_1^2$

Nous proposons ici de calculer le groupe $\mathcal{O}(1,\ 1)$. Il s'agit de trouver les automorphismes φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$

$$q(\varphi(x)) = q(x)$$

Si on note respectivement A et G les matrice de φ et q dans la base canonique, A doit vérifier

$$^tAGA = G \tag{3}$$

Notons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Puisque

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

l'équation (3) équivaut au système d'équations scalaires

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ ab - cd = 0 \\ b^2 - d^2 = -1 \end{cases}$$

De $a^2 - c^2 = 1$, on déduit que $a \neq 0$, et on peut poser

$$\beta = \frac{c}{a}$$

En divisant la première équation scalaire par a^2 on obtient

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{a^2}$$

d'où

$$a^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

ce qui prouve au passage que $1 - \beta^2$ est positif, c'est à dire

$$\beta \in [-1, 1]$$

La première équation scalaire donne

$$c^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$$

La deuxième équation scalaire donne, en la divisant par a

$$b = \beta d$$

En remplaçant b par βd dans la troisième équation scalaire, on obtient

$$d^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

d'où

$$b^2 = \beta^2 d^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$$

Nous avons trouvé a^2, b^2, c^2 et d^2. Pour trouver les coefficients de A il faudra discuter selon les signes. D'après la deuxième équation scalaire, $ab = cd$, ce qui prouve que chaque couple (a, b) et (c, d) est

- soit constitué d'éléments de signes opposés (tous les deux en même temps),
- soit constitué d'éléments de mêmes signes,

ce qui fait en tout 8 possibilités. Les signes des coefficients de A peuvent par exemple être

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$$

Pour chacune de ces possibilités nous connaissons le signe de β puisque ce dernier vaut c/a. Le tableau ci-dessous résume notre discussion :

$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \beta > 0,\ A = \begin{pmatrix} 1/\surd & -\beta/\surd \\ \beta/\surd & -1/\surd \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \beta > 0,\ A = \begin{pmatrix} 1/\surd & \beta/\surd \\ \beta/\surd & 1/\surd \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \beta < 0,\ A = \begin{pmatrix} 1/\surd & \beta/\surd \\ \beta/\surd & 1/\surd \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix} \beta < 0,\ A = \begin{pmatrix} 1/\surd & -\beta/\surd \\ \beta/\surd & -1/\surd \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix} \beta < 0,\ A = \begin{pmatrix} -1/\surd & -\beta/\surd \\ -\beta/\surd & -1/\surd \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix} \beta < 0,\ A = \begin{pmatrix} -1/\surd & \beta/\surd \\ -\beta/\surd & 1/\surd \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \beta > 0,\ A = \begin{pmatrix} -1/\surd & \beta/\surd \\ -\beta/\surd & 1/\surd \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \beta > 0,\ A = \begin{pmatrix} -1/\surd & -\beta/\surd \\ -\beta/\surd & -1/\surd \end{pmatrix}$

Finalement il n'y a que quatre formes possibles pour la matrice de φ. Sachant que $\beta \in [-1, 1]$, il existe $\psi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\beta = \operatorname{th} \psi$$

ainsi

$$\begin{cases} \operatorname{ch} \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \operatorname{sh} \psi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$$

et les quatre formes possibles pour A sont

$$A(\psi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi & \operatorname{sh} \psi \\ \operatorname{sh} \psi & \operatorname{ch} \psi \end{pmatrix} \quad B(\psi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi & -\operatorname{sh} \psi \\ \operatorname{sh} \psi & -\operatorname{ch} \psi \end{pmatrix}$$
$$C(\psi) = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} \psi & \operatorname{sh} \psi \\ -\operatorname{sh} \psi & \operatorname{ch} \psi \end{pmatrix} \quad D(\psi) = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} \psi & -\operatorname{sh} \psi \\ -\operatorname{sh} \psi & -\operatorname{ch} \psi \end{pmatrix}$$

En notant $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ les ensembles constitués par ces quatre types de matrices, on trouve

$$\mathcal{O}(1,1) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$$

(on identifie ici endomorphismes et matrices, bien entendu). Le lecteur vérifiera que cet ensemble est bien un groupe.

Les transformations de Lorentz sont appelées rotations hyperboliques (le paramètre ψ est l'angle de la rotation). Naturellement chaque rotation hyperbolique laisse invariantes les hyperboles $\mathcal{H}_k = \{x \in \mathbb{R}^2 ; q(x) = k\}$. Notons que le cône de lumière est l'hyperbole dégénérée $\mathcal{H}_0$.

Notons $e_1 = (1, 0)$. Le lecteur vérifiera que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}(1,1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ A & \longmapsto & (\det A, \operatorname{signe}\langle e_0, A e_0 \rangle) \end{array}$$

est un morphisme de groupes. Grâce à ce morphisme on peut montrer que les quatre composantes connexes de $\mathcal{O}(1, 1)$ sont $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. On notera que $\mathcal{A}$ est la composante connexe de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

5 Formules classiques pour les transformations de Lorentz

Nous nous plaçons toujours dans $\mathbb{R}^2$. Supposons que le système de coordonnées (x_0', x_1') soit relié à (x_0, x_1) par la transformation de Lorentz $A(\psi)$, autrement dit que

$$\begin{cases} ct = ct' \operatorname{ch} \psi + x_1' \operatorname{sh} \psi \\ x_1 = ct' \operatorname{sh} \psi + x_1' \operatorname{ch} \psi \end{cases} \tag{4}$$

L'origine O' du repère spatial du système (x'_0, x'_1) s'écrit $(ct', 0)$ dans $\mathfrak{R}'$ et $(ct' \operatorname{ch} \psi, ct' \operatorname{sh} \psi)$ dans $\mathfrak{R}$, autrement dit pour O' on a

$$\begin{cases} t = t' \operatorname{ch} \psi \\ x_1 = ct' \operatorname{sh} \psi \end{cases}$$

d'où

$$\frac{x_1}{ct} = \operatorname{th} \psi$$

comme par ailleurs nous savons que $\frac{x_1}{t}$ est la vitesse (notons la v) de O' calculée dans $\mathfrak{R}$, nous avons montré que

$$\operatorname{th} \psi = \frac{v}{c}$$

ce qui permet de comprendre le paramètre ψ. Des égalités

$$\begin{cases} \operatorname{ch} \psi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \operatorname{sh} \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

on déduit que la transformation de Lorentz (4) s'écrit

$$\begin{cases} t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x_1 = \frac{x'_1 + v t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

C'est sous cette forme que Lorentz introduisit les transformations qui aujourd'hui portent son nom. Elles lui permirent comment on l'a déjà signalé d'expliquer convenablement les équations de Maxwell.

On notera, et c'est un point fondamental, que le temps ne se mesure pas de la même manière dans les deux référentiels. Ceci peut au premier abord choquer l'intuition. Difficile en effet de concevoir que le temps ne s'écoule pas de la même manière pour un observateur qui se déplace par rapport à nous !

On remarquera aussi que pour les vitesses v négligeables devant c, on a $\frac{v}{c} \approx 0$ et cette transformation s'écrit

$$\begin{cases} t \approx t' \\ x_1 \approx x'_1 + v t' \end{cases}$$

On reconnaît la transformation de Galilée. Ainsi la théorie de la relativité ne rejette pas la mécanique classique mais nous montre que cette dernière n'est qu'une approximation de la réalité qui demeure correcte tant que les vitesses étudiées sont négligeables devant c.

6 Quelques transformations de Lorentz de $\mathbb{R}^4_1$

Supposons ici que le référentiel $\mathfrak{R}'$, dont on notera (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) le système de coordonnées, se déplace le long de l'axe des x_1, à vitesse constante v. Les formules de changement de coordonnées $\mathfrak{R}' \rightarrow \mathfrak{R}$ sont alors de la forme

$$\begin{cases} x_0 = a x'_0 + b x'_1 \\ x_1 = c x'_0 + d x'_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \tag{5}$$

avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(1, 1)$. Si on diminue v jusqu'à atteindre zéro, la transformation précédente s'écrit avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que A est dans la même composante connexe que la matrice identité, à savoir $\mathcal{A}$. Ainsi A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} \text{ch}\,\psi & \text{sh}\,\psi \\ \text{sh}\,\psi & \text{ch}\,\psi \end{pmatrix}$$

pour un certain réel ψ. En reprenant le raisonnement de la section précédente, on trouve que $\text{th}\,\psi = \frac{v}{c}$ et la transformation (5) s'écrit

$$\begin{cases} t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x_1 = \dfrac{x_1' + v t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

Cette formule donne une idée de ce que l'on peut trouver dans $\mathcal{O}(1, 3)$, même si comme on s'en doute, cela ne décrit pas toutes les possibilités. On notera que si v est négligeable devant c, ce changement est proche de la transformation de Galilée vue à la section 2.

7 Les dimensions d'un objet dépendent de l'observateur

Soit B un bâton d'extrémités les points $m(ct, a, 0, 0)$ et $n(ct, b, 0, 0)$ avec $a > b$. La longueur spatiale de B mesurée dans $\mathfrak{R}$ est

$$\ell = a - b$$

D'après la section précèdente, les coordonnées de m et n dans un référentiel $\mathfrak{R}'$ se déplaçant le long de l'axe des x_1 à vitesse constante v sont $(ct', a', 0, 0)$ et $(ct', b', 0, 0)$ avec

$$\begin{cases} a = \dfrac{a' + v t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ b = \dfrac{b' + v t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

Mais alors la longueur de B mesurée dans $\mathfrak{R}'$ est

$$\ell' = a' - b' = \ell \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

et on constate que $\ell' < \ell$. Ainsi, pour un observateur au repos, la longueur d'un bâton glissant le long de son propre axe est plus grande que pour un observateur se déplaçant avec le bâton ! la longueur (spatiale) n'est donc pas un invariant : elle dépend de l'observateur ! On notera que cela montre un autre phénomène intéressant : pour un observateur dont la vitesse augmente en s'approchant de la valeur c, l'espace se contracte. C'est ce qu'on voit dans le Guerre des Etoiles par exemple !

8 Le temps absolu n'existe pas

Soient E_1 et E_2 deux événements instantannés pour un observateur attaché au référentiel $\mathfrak{R}$. On suppose que ces deux événements ont lieu à des endroits différents de l'espace physique, ou sans perte de généralité, que les coordonnées de E_1 et E_2 sont respectivement (ct, a, b, c) et $(ct, \alpha, \beta, \gamma)$ dans $\mathfrak{R}$, avec $a \neq \alpha$. Notons (ct_1', a', b', c') et $(ct_2', \alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées de ces événements dans un référentiel $\mathfrak{R}'$ lié à $\mathfrak{R}$ par les formules (5). On a alors

$$\begin{cases} t = \dfrac{t_1' + \frac{v}{c^2} a'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t = \dfrac{t_2' + \frac{v}{c^2} \alpha'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

d'où

$$t_1' - t_2' = \frac{v}{c^2} (\alpha' - a')$$

ce qui montre que si l'observateur $\mathfrak{R}'$ va vite (par rapport à $\mathfrak{R}$), il voit les événements E_1 et E_2 très espacés dans le temps ! De son point de vue ces deux événements ne sont pas instantannés. Pour les vitesses faibles on retombe dans la mécanique classique avec $t'_1 \approx t'_2$, mais avec les grandes vitesses rien ne va plus ! La théorie de la relativité nous enseigne que la *simultanéité* est un concept dénué de sens.

On peut même montrer que pour l'observateur qui se déplace, le temps s'écoule plus vite que pour l'observateur au repos, ce qui est aussi troublant ! Supposons que E_1 et E_2 sont des événements ayant lieu au même endroit à des instants différents pour l'observateur $\mathfrak{R}'$. Notons (ct'_1, a', b', c') et (ct'_2, a', b', c') les coordonnées dans $\mathfrak{R}'$ de E_1 et E_2, respectivement. Dans $\mathfrak{R}$, ces deux événements auront pour coordonnées (ct_1, a, b, c) et $(ct_2, \alpha, \beta, \gamma)$, respectivement. Bien que pour $\mathfrak{R}'$, E_1 et E_2 occupent la même position, ceci ne demeure pas vrai pour l'observateur $\mathfrak{R}$, comme le montrent les formules de changements. Ceci n'a rien d'étonnant puisque pour $\mathfrak{R}$, le référentiel $\mathfrak{R}'$ est en mouvement. Les formules pour t donnent

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ce qui montre que $\Delta t < \Delta t'$.

9 La vitesse de la lumière est la même pour tout observateur

Regardons maintenant comment se composent les vitesses. Nous savons qu'en mécanique classique les vitesses mesurées dans $\mathfrak{R}$ s'obtiennent à partir des vitesses mesurées dans $\mathfrak{R}'$ en leur ajoutant la vitesse de $\mathfrak{R}'$ mesurée dans $\mathfrak{R}$. Dans la théorie de la relativité ce résultat est faux. Supposons que les référentiels $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ sont liés par la transformation (5) qui exprime que le deuxième observateur se daplace le long de l'axe des x_1 à la vitesse v. Soit P un point se déplaçant le long de l'axe des x'_1 à la vitesse w' :

$$w' = \frac{dx'_1}{dt'}$$

Notons

$$w = \frac{dx_1}{dt}$$

C'est la vitesse de P mesurée dans $\mathfrak{R}$. Les formules exprimant t et x_1 donnent

$$\begin{cases} dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ dx_1 = \frac{v dt' + dx'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

d'où

$$w = \frac{v dt' + dx'_1}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'_1} = \frac{v + w'}{1 + \frac{v}{c^2} w'} = \frac{v + w'}{1 + \frac{vw'}{c^2}}$$

Notons que si v et w' sont négligeables par rapport à c, on retrouve la loi classique d'addition des vitesses,

$$w \approx w' + v$$

En revanche, si P est un photon, alors $w' = c$ et

$$w = \frac{v + c}{1 + \frac{v}{c}} = c$$

ce qui signifie que les deux observateurs $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ voient le photon P se déplacer à la même vitesse ! Nous venons de montrer que si les repères inertiels sont reliés par des changements de coordonnées préservant la métrique de Monkowski, le second principe de la relativité restreinte est respecté, à savoir :

la vitesse de la lumière est la même dans tout référentiel inertiel.

10 Conclusion

Que le lecteur ne s'y trompe pas : nous n'avons pas démontré que les bâtons ont des longueurs différentes selon qu'ils sont au repos ou qu'ils bougent, nous n'avons pas non plus démontré que le temps s'écoule différemment tantôt que l'on bouge ou pas. Nous avons simplement démontré que si les changements de coordonnées permettant de passer d'un référentiel galiléen à un autre sont les transformations préservant la métrique de Minkowski, alors effectivement les notions de longueur et de temps dépendent de l'observateur. Il se trouve que ces résultat ont été confirmés par l'observation.

La question qui se pose alors est : pourquoi les référentiels inertiels sont-ils reliés par des transformations préservant la métrique de Minkowski ? Pourquoi par exemple, la transformation de Galilée donnée à la section 2 n'est-elle pas inertielle ? La réponse est donnée par le second principe de la relativité restreinte. D'après ce principe, aucune particule ne peut dépasser les 300 000 km par seconde, quelque soit le référentiel inertiel dans lequel on mesure cette vitesse. Autrement dit, pour toute ligne d'univers $r(t) = (ct,\, x(t),\, y(t),\, z(t))$ écrite dans un référentiel inertiel $\mathfrak{R}$, nous avons $q(\dot{r}) > 0$ à chaque instant t, ce qui signifie que le quadrivecteur vitesse

$$(c, \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

est toujours dans le cône de lumière :

Figure 3.

Supposons que $\mathfrak{R}'$ soit un autre référentiel inertiel mais que la transformation permettant de passer des coordonnées (ct, x, y, z) vers les coordonnées (ct', x', y', z') ne préserve pas q. Notons q' l'expression de q dans le nouveau référentiel. Pour l'observateur $\mathfrak{R}'$ le cône de lumière n'aura pas la même forme que pour $\mathfrak{R}$. Pour $\mathfrak{R}'$, ce que $\mathfrak{R}$ appelle cône de lumière sera défini par l'équation

$$q'(ct', x', y', z') = 0$$

Il verra un cône, certes, mais pas le même.

De la même manière, lorsque $\mathfrak{R}$ voit la ligne d'univers $r(t) = (ct, x(t), y(t), z(t))$, l'observateur $\mathfrak{R}'$ voit autre chose, à savoir $r'(t') = (ct',\, x'(t'),\, y'(t'),\, z'(t'))$. Nous avons déjà dit que la condition $q(\dot{r}) > 0$ est satisfaite à chaque instant. Ceci garantit que $q'(\dot{r}') > 0$, autrement dit que le vecteur $\dot{r}'$ est toujours dans l'*image* du cône de lumière (et pas forcément dans le cône de lumière). On peut alors profiter de la différence entre le cône de lumière et son image vue par $\mathfrak{R}'$ pour faire une expérience $r(t)$ dans $\mathfrak{R}$ qui à un certain instant t verra son quadrivecteur vitesse $\dot{r}'$ à l'extérieur du cône

$$ct' - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

Mais ceci contredit le principe selon lequel rien ne peut dépasser la vitesse de la lumière. Voilà pourquoi la transformation

$$(ct, x, y, z) \longmapsto (ct', x', y', z')$$

doit préserver q.

Les choses semblent plus claires maintenant. Les calculs de la section 4 montrent comment les changements préservant q « agissent » sur le paramètre t.

Bibliographie

[1] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, and S.P. Novikov. *Géométrie contemporaine, méthodes et applications, tome 1*. Édition MIR, Moscou, 1979.

[2] Richard Gomez. *Formes quadratiques*. À paraître, 2011.